ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

NGUYỄN THỊ TRANG

PHƯƠNG PHÁP HIỆU CHỈNH LẶP GIẢI BÀI TOÁN CHẤP NHẬN TÁCH ĐA TẬP TRONG KHÔNG GIAN HILBERT

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN – 2020

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

NGUYỄN THỊ TRANG

PHƯƠNG PHÁP HIỆU CHỈNH LẶP GIẢI BÀI TOÁN CHẤP NHẬN TÁCH ĐA TẬP TRONG KHÔNG GIAN HILBERT

Chuyên ngành: **Toán ứng dụng**

Mã số: **8 46 01 12**

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC

GS.TS. NGUYỄN BƯỜNG

THÁI NGUYÊN – 2020

Lời cảm ơn

Tôi xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đến GS.TS. Nguyễn Bường, người đã tận tình hướng dẫn, giúp đỡ tôi trong suốt quá trình học tập nghiên cứu để tôi hoàn thành luận văn.

Tôi xin chân thành cảm ơn Ban Giám Hiệu, các thầy giáo, cô giáo trong khoa Toán – Tin, trường Đại học Khoa học–Đại học Thái Nguyên đã tận tình giúp đỡ tôi trong suốt quá trình học tập và nghiên cứu tại Trường.

Tôi xin gửi lời cảm ơn tới Ban Giám Hiệu Trường THCS Cảnh Hưng - nơi tôi đang làm việc, cùng các đồng nghiệp đã tạo điều kiện về mọi mặt để tôi tham gia học tập và nghiên cứu.

Nhân dịp này, tôi cũng xin gửi lời cảm ơn chân thành tới Ban Giám Hiệu trường THCS Cảnh Hưng, gia đình, đồng nghiệp, người thân, bạn bè đã động viên, khích lệ, giúp đỡ tôi trong quá trình học tập và nghiên cứu.

Mục lục

Một số ký hiệu và viết tắt

H	không gian Hilbert thực
H^*	không gian đối ngẫu của H
N	tập số nguyên không âm
N^*	tập số nguyên dương
$\mathbb{R}$	tập hợp các số thực
C	tập con đóng lồi của H
$\cap$	phép giao
$\emptyset$	tập rỗng
$\forall x$	với mọi x
$\limsup\limits_{n\to\infty} x_n$	giới hạn trên của dãy số $\{x_n\}$
$\liminf\limits_{n\to\infty} x_n$	giới hạn dưới của dãy số $\{x_n\}$
$x_n \longrightarrow x_0$	dãy $\{x_n\}$ hội tụ mạnh về x_0
$x_n \rightharpoonup x_0$	dãy $\{x_n\}$ hội tụ yếu về x_0
$Fix(T)$ hoặc $F(T)$	tập điểm bất động của ánh xạ T
∂f	dưới vi phân của hàm lồi f
P_C	phép mêtric lên C

Mở đầu

Bài toán chấp nhận tách đóng vai trò đặc biệt quan trọng trong việc mô hình hóa nhiều bài toán ngược xuất hiện trong thực tế như bài toán nén hình ảnh, chụp hình cộng hưởng từ, khôi phục ảnh. Một trong những phương pháp đã và đang được nhiều tác giả sử dụng để giải bài toán chấp nhận tách là phương pháp chiếu trong đó cần phải thực hiện phép chiếu mêtric lên các tập con lồi đóng của không gian Hilbert. Tuy nhiên, việc tính ảnh của ánh xạ chiếu mêtric trên một tập lồi đóng bất kỳ cũng không dễ thực thi. Do vậy, cần xây dựng các phương pháp giải hiệu quả hơn. Đề tài của luận văn là phương pháp hiệu chỉnh lặp giải bài toán chấp nhận tách đa tập trong không gian Hilbert. Đó là bài toán tìm một điểm thuộc giao điểm của một họ tập đóng, lồi trong không gian Hilbert mà ảnh của nó qua một ánh xạ tuyến tính giới nội nằm vào giao của một họ các tập đóng, lồi trong một không gian Hilbert khác. Đây là một đề tài vừa có ý nghĩa về mặt lý thuyết, đồng thời vừa có ý nghĩa thực tiễn cao.

Nội dung của luận văn được chia làm hai chương chính:

Chương 1. Một số kiến thức chuẩn bị

Trong chương này, luận văn đề cập đến một số vấn đề cơ bản của giải tích hàm, phát biểu bài toán chấp nhận tách đa tập, phương pháp hiệu chỉnh, phương pháp lặp, hiệu chỉnh lặp.

Chương 2. Phương pháp hiệu chỉnh lặp giải bài toán chấp nhận tách trong không gian đa tập

Trong chương này, luận văn tập trung trình bày lại một cách chi tiết các kết quả của N. Buong, P.T.T. Hoài, K.T Bình [3] về phương pháp hiệu chỉnh lặp giải bài toán chấp nhận tách đa tập trong không gian Hilbert.

Chương 1
Kiến thức chuẩn bị

Chương này bao bồm 3 mục. Mục 1.1 trình bày các khái niệm cơ bản của giải tích hàm. Mục 1.2 phát biểu bài toán chấp nhận tách. Mục 1.3 đề cập đến phương pháp hiệu chỉnh lặp. Nội dung của chương này được tham khảo trong các tài liệu [3, 4].

1.1. Các khái niệm cơ bản của giải tích hàm

1.1.1. Không gian Hilbert

Định nghĩa 1.1. Cho không gian véctơ X trên trường số thực $\mathbb{R}$. Tích vô hướng xác định trong X là một ánh xạ

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X &\to \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto \langle x, y \rangle \end{aligned}$$

thỏa mãn các điều kiện sau đây:

(i) $\langle x, x \rangle \geq 0$ với mọi $x \in X$, $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

(ii) $\langle y, x \rangle = \langle x, y \rangle$ với mọi $x, y \in X$;

(iii) $\langle x + x', y \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x', y \rangle$ với mọi $x, x', y \in X$;

(iv) $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$ với mọi $x, y \in X$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Số $\langle x, y \rangle$ được gọi là *tích vô hướng* của hai véctơ x, y trong X.

Nhận xét 1.1. Từ định nghĩa suy ra với mọi $x, y, z \in X, \lambda \in \mathbb{R}$, ta có

(i) $\langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$;

(ii) $\langle x, \lambda y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$;

(iii) $\langle x, 0 \rangle = 0$.

Định nghĩa 1.2. Cặp $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, trong đó X là một không gian tuyến tính trên $\mathbb{R}$, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ là tích vô hướng trên X được gọi là *không gian tiền Hilbert* thực.

Mệnh đề 1.1. *Mọi không gian tiền Hilbert X là không gian tuyến tính định chuẩn, với chuẩn xác định bởi*

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle} \quad \text{với } x \in X.$$

Định nghĩa 1.3. Nếu X là không gian tiền Hilbert thực và đầy đủ đối với chuẩn cảm sinh từ tích vô hướng thì X được gọi là *không gian Hilbert* thực.

Định nghĩa 1.4. Cho H là không gian Hilbert. Dãy $\{x_n\}$ được gọi là

(i) *Hội tụ mạnh* tới phần tử $x \in H$, ký hiệu $x_n \to x$, nếu $\|x_n - x\| \to 0$ khi $n \to \infty$;

(ii) *Hội tụ yếu* tới phần tử $x \in H$, ký hiệu $x_n \rightharpoonup x$, nếu $\langle x_n, y\rangle \to \langle x, y\rangle$ khi $n \to \infty$ với mọi $y \in H$.

Chú ý 1.1.

(i) Trong không gian Hilbert H, hội tụ mạnh kéo theo hội tụ yếu, nhưng điều ngược lại không đúng.

(ii) Mọi không gian Hilbert đều có tính chất Kadec-Klee, tức là nếu dãy $\{x_n\}$ trong không gian Hilbert H thỏa mãn các điều kiện $\|x_n\| \to \|x\|$ và $x_n \rightharpoonup x$ thì $x_n \to x$ khi $n \to \infty$.

Định nghĩa 1.5. Cho C là tập con của không gian Hilbert H. Khi đó C được gọi là

(i) *Tập đóng* nếu mọi dãy $\{x_n\} \subset C$ thỏa mãn $x_n \to x$ khi $n \to \infty$, ta đều có $x \in C$;

(ii) *Tập đóng yếu* nếu mọi dãy $\{x_n\} \subset C$ thỏa mãn $x_n \rightharpoonup x$ khi $n \to \infty$, ta đều có $x \in C$;

(iii) *Tập compact* nếu mọi dãy $\{x_n\} \subset C$ đều có một dãy con hội tụ về một phần tử thuộc C;

(iv) *Tập compact tương đối* nếu mọi dãy $\{x_n\} \subset C$ đều có một dãy con hội tụ;

(v) *Tập compact yếu* nếu mọi dãy $\{x_n\} \subset C$ đều có một dãy con hội tụ yếu về một phần tử thuộc C;

(vi) *Tập compact tương đối yếu* nếu mọi dãy $\{x_n\} \subset C$ đều có một dãy con hội tụ yếu.

Nhận xét 1.2.

(i) Mọi tập compact đều là tập compact tương đối, nhưng điều ngược lại không đúng.

(ii) Mọi tập đóng yếu đều là tập đóng, nhưng điều ngược lại không đúng.

Mệnh đề 1.2. *Cho H là không gian Hilbert thực và C là một tập con của H. Khi đó, ta có các khẳng định sau:*

(i) Nếu C là tập lồi, đóng thì C là tập đóng yếu;

(ii) Nếu C là tập bị chặn thì C là tập compact tương đối yếu.

Định nghĩa 1.6. Cho C là một tập con khác rỗng, lồi, đóng của không gian Hilbert thực H. Ta biết rằng với mỗi $x \in H$, đều tồn tại duy nhất một phần tử $P_C(x) \in C$ thỏa mãn

$$\|x - P_C(x)\| = \inf_{y \in C} \|x - y\|.$$

Phần tử $P_C(x)$ được xác định như trên được gọi là *hình chiếu* của x lên C và ánh xạ $P_C : H \to C$ biến mỗi phần tử $x \in H$ thành $P_C(x)$ được gọi là *phép chiếu mêtric* từ H lên C.

Đặc trưng của phép chiếu mêtric được cho bởi mệnh đề dưới đây.

Mệnh đề 1.3. *Cho C là một tập con lồi, đóng, khác rỗng của không gian Hilbert thực H. Khi đó, ánh xạ $P_C : H \to C$ là phép chiếu mêtric từ H lên C khi và chỉ khi*

$$\langle x - P_C(x), y - P_C(x) \rangle \leq 0 \text{ với mọi } y \in C.$$

Nhận xét 1.3. Về phương diện hình học, với mọi $y \in C$, nếu ta gọi α là góc tạo bởi các véctơ $x - P_C(x)$ và $y - P_C(x)$ thì $\alpha \leq \dfrac{\pi}{2}$.

Ví dụ 1.1. $\mathbb{R}^n$ là không gian Hilbert thực với tích vô hướng

$$\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \alpha_k$$

trong đó $x = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$, $y = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ và chuẩn cảm sinh

$$\|x\|^2 = \langle x, x\rangle = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \alpha_k = \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|^2.$$

Ví dụ 1.2. Không gian l_2, với $x = \{\lambda_k\}, y = \{\alpha_k\}$, ta định nghĩa

$$\langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \alpha_k$$

thì $\langle \cdot, \cdot \rangle$ là tích vô hướng, $(l_2, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ là không gian Hilbert.

1.1.2. Một số tính chất

Định lí 1.1 (Bất đẳng thức Cauchy-Schwartz)**.** *Trong không gian tiền Hilbert X, với mọi $x, y \in X$ ta luôn có bất đẳng thức sau*

$$|\langle x, y\rangle|^2 \le \langle x, x\rangle . \langle y, y\rangle. \tag{1.1}$$

Chứng minh. Với $y = 0$ bất đẳng thức hiển nhiên đúng. Giả sử $y \neq 0$ khi đó với mọi số $\lambda \in \mathbb{R}$ ta đều có

$$\langle x + \lambda y, x + \lambda y\rangle \ge 0$$

tức là

$$\langle x, x\rangle + \lambda\langle y, x\rangle + \lambda\langle x, y\rangle + |\lambda|^2\langle y, y\rangle \ge 0.$$

Chọn $\lambda = -\dfrac{\langle x, y\rangle}{\langle y, y\rangle}$ ta được

$$\langle x, x\rangle - \frac{|\langle x, y\rangle|^2}{\langle y, y\rangle} \ge 0 \Leftrightarrow |\langle x, y\rangle|^2 \le \langle x, x\rangle . \langle y, y\rangle.$$

Định lý được chứng minh. □

Định lí 1.2. *Giả sử $\{x_n\}_n, \{y_n\}_n$ là hai dãy hội tụ yếu đến a, b trong không gian tiền Hilbert thực X. Khi đó*

$$\lim_{n\to\infty} \langle x_n, y_n\rangle = \langle a, b\rangle.$$

Chứng minh. Giả sử $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$ trong không gian X. Ta sẽ chứng minh $\lim\limits_{n\to\infty} \langle x_n, y_n\rangle = \langle a, b\rangle$ trong $\mathbb{R}$.

Thật vậy, ta có

$$|\langle x_n, y_n\rangle - \langle a, b\rangle| = |\langle x_n, y_n\rangle + \langle x_n, b\rangle - \langle x_n, b\rangle - \langle a, b\rangle|$$